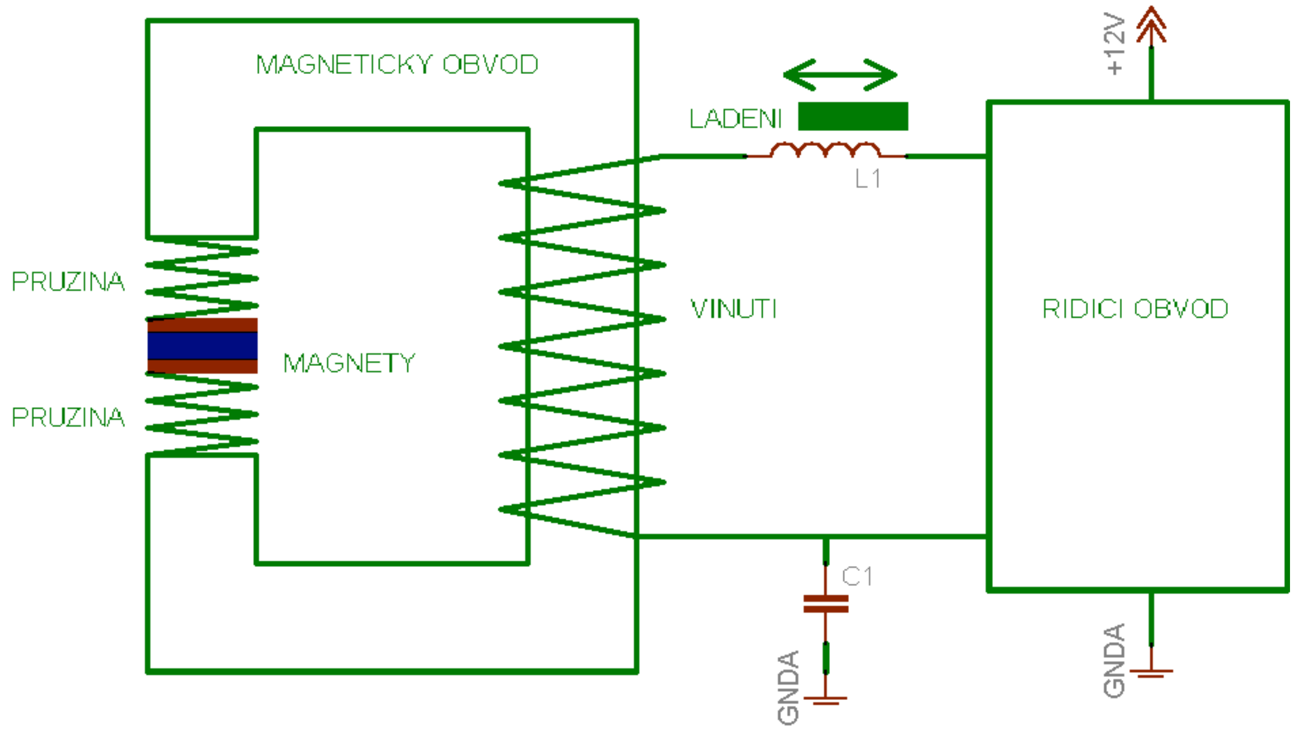
Elektromechanický oscilátor

V tomto článku si ukážeme jeden ze způsobů, jak využít silové účinky cívky s feromagnetickým jádrem v rezonanci. I člověk, který neoplývá technickou představivostí, jistě nalezne dost příkladů, kde by se zařízení na tomto principu dalo využít, a proto tento problém přenechám čtenáři k úvaze.



Obr. 1

Elektromechanický oscilátor na obr. 1 je tvořen magnetickým obvodem, v jehož vzduchové mezeře jsou umístěny dva permanentní magnety, které jsou pevně spojeny a uspořádány tak, aby se vzájemně odpuzovaly. Magnety jsou odpružený z obou stran. Na druhé straně je magnetický obvod opatřen vinutím, které spolu s kondenzátorem C1 tvoří rezonanční obvod buzený elektrickými impulsy. Dále je zde tlumivka s proměnnou indukčností, jejímž úkolem je naladit frekvenci budicího signálu na rezonanční kmitočet odpružených permanentních magnetů. Úkolem řídicího obvodu je udržovat v rezonanci elektrický LC obvod. Pro tento účel je z kondenzátoru C1 vedena do řídicího obvodu zpětná vazba. Úkolem tohoto článku není vysvětlovat funkci řídicího obvodu. Zájemce odkazuji na články Impulsní oscilátor I, II.

Analýza mechanického oscilátoru

Na permanentní magnet budou působit tři síly:
1) síla pružnosti: $\mathbf{F}_1 = -K\mathbf{y}$ [N, N/m, m], kde K je tuhost pružiny, **y** je výchylka,
2) tlumící síla: $\mathbf{F}_2 = -R\mathbf{v} = -R\, dy/dt$ [N, Ns/m, m/s], kde R je koeficient odporu, **v** je rychlost,
3) síla elektromagnetu: $f_3 = F \sin(\omega t)$, kde F je amplituda síly, ω je úhlová rychlost.

Na permanentní magnet bude působit výsledná síla $m \dfrac{d^2y}{dt^2}$, která bude součtem výše uvedených tří sil:

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = - Ky - R \frac{dy}{dt} + \mathbf{F}_3 \qquad (1)$$

Po úpravě dostaneme diferenciální rovnici s konstantními koeficienty ve tvaru:

$$y'' + a_1y' + a_0y = f_3, \qquad (2)$$

$$\text{kde } a_1 = R/m,\ a_0 = K/m. \qquad (2a)$$

Pomocí věty o obrazu derivace k rovnici (2) vytvoříme Laplaceův obraz:

$$p^2Y + a_1pY + a_0Y = F_3 \qquad (3)$$

Definujeme přenos jako poměr výstupní veličiny (výchylka y) ku vstupní veličině (síla f):

$$A = \frac{y}{f} \qquad (4)$$

Laplaceův obrazový přenos potom odvodíme z rovnice (3):

$$\mathcal{L}\ \{A\} = A(p) = \frac{Y(p)}{F(p)} = \frac{1}{p^2 + a_1p + a_0} \qquad (5)$$

K frekvenčnímu přenosu přejdeme tak, že místo Laplaceových obrazů veličin (F, Y) uvažujeme jejich fázory a dosadíme $p = j\omega$:

$$A(j\omega) = \frac{\mathbf{Y}(j\omega)}{\mathbf{F}(j\omega)} = \frac{1}{- \omega^2 + j\omega a_1 + a_0} = \frac{1}{a_0 - \omega^2 + j\omega a_1} \qquad (6)$$

Způsobem, známým z článku o elektrické rezonanci, odstraníme z jmenovatele imaginární složku:

$$A(j\omega) = \frac{a_0 - \omega^2 - j\omega a_1}{(a_0 - \omega^2)^2 + \omega^2 a_1^2} \qquad (7)$$

Ze vztahu pro frekvenční přenos (7) je zřejmé, že podmínkou rezonance je rovnice

$$a_0 - \omega_r^2 = 0, \qquad (8)$$

čímž se nám přenos (7) zjednoduší na

$$A(j\omega) = - \frac{j}{\omega_r a_1} \qquad (9)$$

Po zpětném dosazení za koeficienty a_1, a_0 dostaneme výsledné vztahy pro rezonanční kmitočet a amplitudu kmitů v rezonanci:

$$\omega_r = \sqrt{K/m} \qquad (10)$$

kde $\omega_r = 2\pi f_r$ je úhlový rezonanční kmitočet
K je tuhost pružiny,
m je hmotnost mech. kyvadla (permanentních magnetů).

Po dosazení za formální konstanty bude pro přenos platit

$$\mathbf{A}(j\omega) = \frac{\mathbf{Y}}{\mathbf{F}} = \frac{-j\,m}{\omega_r\,R} \tag{11}$$

kde **Y** je fázor výchylky, **F** je fázor síly
R je koeficient odporu, další veličiny viz výše.

Poznámka:
Fázory se běžně značí stříškou nad písmenem, avšak zde jsou označeny pouze tučným písmem (z technických důvodů).

Po úpravě dostaneme pro fázor výchylky tento vztah:

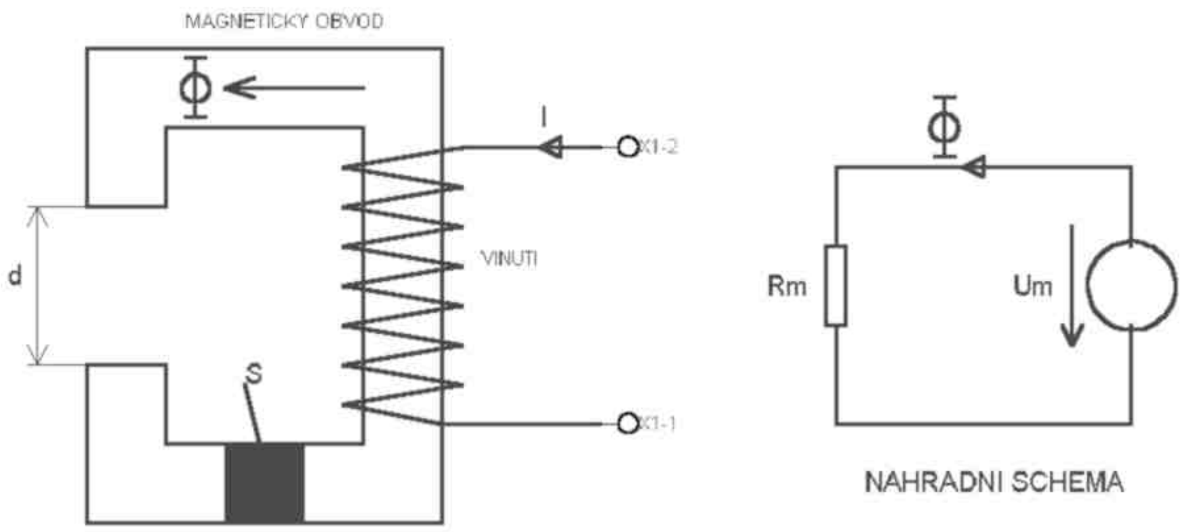
$$\mathbf{Y} = \mathbf{F}\,\frac{-j\,m}{\omega_r\,R} \tag{12}$$

Co nám rovnice (12) říká? Především nám říká, že fázor výchylky **Y** je za fázorem síly **F** zpožděn o $\pi/2$ (tj. o 90°). Znamená to, že když jsou magnety v nejnižší poloze ($y = -Y$), síla $f = 0$ a když jsou magnety v neutrální poloze ($y = 0$), je síla f maximální ($f = F$).

Mezi amplitudou výchylky a amplitudou síly platí vztah

$$Y = F\,\frac{m}{\omega_r\,R} \tag{13}$$

Výpočet magnetického obvodu



Obr. 2

Sílu působící mezi póly elektromagnetu na obr. 2 vypočítáme podle vzorce

$$F = \frac{1}{2\mu_0} B^2 S \tag{14}$$

Postup při výpočtu

1. Zvolíme magnetickou indukci B. (Zpravidla volíme takovou maximální indukci, aby nedošlo k přesycení materiálu magnetického obvodu. Např. pro ferit je to kolem 0,4T [Tesla], pro trafoplechy 1,5T.)

2. Vypočítáme magnetický tok

$$\Phi = B\,S, \qquad [Wb, T, m^2] \tag{15}$$

kde S je průřez feromagnetického jádra.

3. Vypočítáme magnetický odpor obvodu. Permeabilita feromagnetického materiálu je mnohonásobně vyšší než permeabilita vzduchu (permeabilita vakua $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m a prakticky se rovná permeabilitě vzduchu), takže při dostatečně velké vzduchové mezeře můžeme magnetický odpor feromagnetika zanedbat a stačí vypočítat pouze mag. odpor vzduchové mezery:

$$R_m = \frac{d}{\mu_0 S} \tag{16}$$

4. Vypočítáme velikost magnetomotorického napětí, které je schopné v magnetickém obvodu s daným mag. odporem R_m (šířkou vzduchové mezery d) vybudit požadovaný magnetický tok Φ:

$$U_m = N \cdot I = \Phi \cdot R_m, \qquad [Az, Wb, Az/Wb] \tag{17}$$

kde N je počet závitů cívky,
I je elektrický proud protékající cívkou.

5. Pro danou velikost kapacity kondenzátoru C a rezonančního kmitočtu f_r zvolíme indukčnost L tak, aby platil vztah pro rezonanční kmitočet:

6.

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{(LC)}} ,$$

odkud pro indukčnost odvodíme následující vzorec:

$$L = \frac{1}{\omega^2 C} , \qquad (18)$$

kde $\omega = 2\pi f$ je uhlová frekvence.

7. Pro takto určenou indukčnost L vypočítáme počet závitů N. Vzorec pro výpočet N odvodíme následujícím způsobem:

Máme-li navinutou cívku na feromagnetickém jádře (což je náš případ), potom podle statické definice indukčnosti platí vztah:

$$L = \frac{N \cdot \Phi}{I} \qquad (19)$$

Ve vzorci (19) dosadíme za Φ podle vztahu (17) a po úpravě dostaneme pro výpočet indukčnosti následují vzorec:

$$L = \frac{N^2}{R_m} , \qquad (20)$$

odkud dostaneme výsledný vztah pro výpočet počtu závitů cívky:

$$N = \sqrt{L \cdot R_m} \qquad (21)$$

8. Nyní, když známe magnetomotorické napětí U_m i počet závitů cívky N, můžeme určit proud, který cívkou bude protékat:

$$I = \frac{U_m}{N} \qquad (22)$$

9. Nakonec ještě vypočítáme průřez (resp. průměr) drátu a můžeme odhadnout odpor vinutí:

Vypočítáme průřez vinutí podle vzorce:

$$S = \frac{I}{\sigma} , \qquad (23)$$

kde σ je proudová hustota. (Pro menší cívky volíme proudovou hustotu $\sigma = 4$ A/mm^2.)
Pro kruhový průřez drátu S platí pro průměr drátu D vztah $D = \sqrt{(4S/\pi)}$. Zvolíme nejbližší větší normalizovaný průměr drátu.
Odhad odporu vinutí můžeme provést následovně: Na základě rozměrů cívky, počtu závitů a průměru drátu odhadneme střední délku závitu l_{1z}. Délka drátu vinutí potom bude $l = l_{1z} \cdot N$. Odpor vinutí vypočítáme podle vzorce:

$$R = \rho \frac{l}{S} , \qquad [\Omega, \Omega mm^2/m, m, mm^2] \qquad (24)$$

kde ρ je měrný elektrický odpor. (Pro měď je $\rho = 0{,}0175$ Ωmm^2/m při teplotě 20°C.)

Příklad:

Máme jádro složené z trafoplechů o průřezu 5 x 5 cm, vzduchová mezera je 1 cm a zvolíme maximální sycení jádra B = 1.5 T. Zvolíme kmitočet f = 300Hz a použijeme kondenzátor o kapacitě C = 1μF. Hledáme sílu F, jíž se póly elektromagnetu přitahují, počet závitů cívky N a proud I, který protéká cívkou.

1) Výpočet síly:

$$F = \frac{B^2 S}{2\mu_0} = \frac{1{,}5^2 \cdot 0{,}05^2}{2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}} = 2238\text{N}.$$

(To je síla, jako kdybyste měli pověšené závaží o hmotnosti 228kg!)

2) Výpočet magnetického toku:

$$\Phi = B \cdot S = 1{,}5 \cdot 0{,}05^2 = 3{,}75 \cdot 10^{-3}\text{Wb}.$$

4) Výpočet magnetického odporu:

$$R_m = \frac{d}{\mu_0 \cdot S} = \frac{0{,}01}{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 0{,}05^2} = \frac{10^5}{0{,}01 \cdot \pi} = 3\,183\,099$$

5) Výpočet magnetomotorického napětí:

$$U_m = \Phi \cdot R_m = 3{,}75 \cdot 10^{-3} \cdot 3183099 = 11936{,}6\text{Az}.$$

6) Výpočet indukčnosti:

$$L = \frac{1}{\omega^2 \cdot C} = \frac{1}{(2\pi f)^2 \cdot C} = \frac{1}{(2\pi \cdot 300)^2 \cdot 10^{-6}} = 281{,}45\text{mH}.$$

7) Výpočet počtu závitů:

$$N = \sqrt{L \cdot R_m} = \sqrt{0{,}28145 \cdot 3183099} = 946{,}5 \text{ závitů}.$$

8) Výpočet proudu:

$$I = U_m / N = 11936{,}6 / 946{,}5 = 12{,}6\text{A}.$$